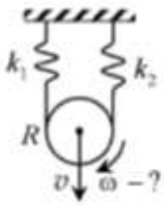
_З А Д А Н И Я_
и решения II муниципального (районного) этапа
Всероссийской олимпиады школьников по физике 2019-2020
10 класс

1. Невесомы блок радиуса R подвешен на ремне, прикрепленном к потолку двумя вертикальными пружинами с жесткостями k_1 и k_2 ($k_1 > k_2$). Ось блока тянут вниз со скоростью **v.** С какой угловой скоростью вращается блок вокруг своей оси? Проскальзывания между блоком и ремнем нет, трения в оси блока нет.



Решение

Поскольку блок лёгкий и вращается с конечной угловой скоростью, можно считать, что суммарный момент сил, действующих на него, равен нулю. Запишем равенство моментов сил относительно оси блока (момент силы, действующей вниз на ось, при этом равен нулю):

$$k_1 x_1 = k_2 x_2, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где x_1 и x_2 — удлинения первой и второй пружины соответственно. Поскольку это равенство справедливо во все моменты времени движения блока, аналогичному уравнению должны удовлетворять и скорости концов пружин (v_1 и v_2, соответственно):

$$k_1 v_1 = k_2 v_2. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Так как ремень нерастяжимый, эти скорости совпадают со скоростями соответствующих точек на ободе блока (расположенных на противоположных концах горизонтального диаметра). Эти точки, в свою очередь, участвуют в двух движениях: поступательном со скоростью v вниз и вращательном со скоростью ωR (ω — искомая угловая скорость), направленной вверх слева со стороны первой пружины и вниз справа со стороны второй пружины:

$$v_1 = v - \omega R, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

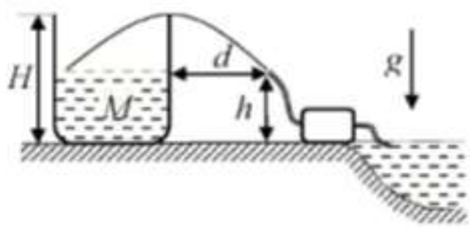
$$v_2 = v + \omega R. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив эти выражения для v_1 и v_2 в предыдущее уравнение, найдём

$$\textbf{ответ: } \omega = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{v}{R}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Отметим, что в некоторых предельных случаях из этого выражения следуют заранее очевидные результаты: $\omega = 0$ при $k_1 = k_2$ или при $v = 0$; $\omega = v/R$ при $k_1 \gg k_2$; $\omega = -v/R$ при $k_2 \gg k_1$.

2. Электрический насос качает воду из бассейна. Струя воды из конца шланга, расположенного на высоте h от уровня воды в бассейне, направлена в бочку высоты *H*. Расстояние между концом шланга и бочкой по горизонтали равно d. Сколько электроэнергии нужно затратить, чтобы накачать в бочку количество воды массой M? Считать, что верхняя точка струи находится непосредственно над краем бочки. Ускорение свободного падения равно g. КПД насоса равно 1, трением воды о шланг и сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение.

Искомая энергия E тратится на подъём воды на высоту h и на разгон её до скорости v, с которой вода выходит из шланга, поэтому

$$E = Mgh + \frac{Mv^2}{2}. \qquad (3 б.)$$

Найдём скорость v. Вертикальная компонента этой скорости $v_{\text{верт}}$ равна gt, а горизонтальная $v_{\text{гориз}}$ равна d/t, где t — время пролёта от шланга до верхней точки струи. Найдём t:

$$\frac{gt^2}{2} = H - h \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Отсюда

$$v_{\text{верт}} = gt = \sqrt{2g(H-h)}, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

$$v_{\text{гориз}} = \frac{d}{t} = d\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Найдём v^2 по теореме Пифагора:

$$v^2 = v_{\text{верт}}^2 + v_{\text{гориз}}^2 = 2g(H-h) + \frac{gd^2}{2(H-h)}.$$

Подставляя это выражение в формулу для E, получим:

$$E = Mgh + \frac{M}{2}\left(2g(H-h) + \frac{gd^2}{2(H-h)}\right) = Mg\left(H + \frac{d^2}{4(H-h)}\right).$$

Ответ: $Mg\left(H + \dfrac{d^2}{4(H-h)}\right).$ **(2 б.)**

*<u>*Примечание:*</u> *энергия, затраченная насосом, может быть также найдена как энергия воды в верхней точке струи:*

$$E = MgH + \frac{Mv_{\text{гориз}}^2}{2}.$$

3. Ныряльщик за жемчугом массой m=60 кг прыгает в воду, набрав полные легкие воздуха (v_0 — 4 литра). При этом объем его тела равен V_0 = 62 литра. С какой максимальной глубины h_{max} ныряльщик может всплыть, не совершая никаких движений?

Решение. Объем ловца жемчуга на глубине h обозначим через $V(h)$. Он всплывает безо всяких усилий, когда выталкивающая сила не меньше, чем сила тяжести, то есть

$$\rho V(h) g \geq mg \ , \qquad (10)$$

где ρ — плотность воды. Максимальная глубина $h_{\max}$ отвечает случаю равенства, когда $V(h_{\max}) = m/\rho$. Изменение объема ловца жемчуга определяется изменением объема $v(h)$ содержащегося в легких воздуха. Из условия

$V - v = const$ получаем

$$V(h) = V_0 - v_0 + v(h) \ . \qquad (11)$$

Применяя к воздуху уравнение состояния идеального газа, находим его объем в зависимости от давления:

$$v(h) = \frac{\nu RT}{p} = \frac{\nu RT}{p_0 + \rho g h} \ , \qquad (12)$$

где p_0 — атмосферное давление. Температура, вообще говоря, испытывает некоторые колебания порядка одного-двух градусов. Но поскольку абсолютная температура отсчитывается от абсолютного нуля $(-273,15\,^\circ C)$, этими колебаниями можно пренебречь и считать процесс изотермическим. Тогда имеем $pv = p_0 v_0$, откуда

$$v(h) = \frac{p_0 v_0}{p_0 + \rho g h} \ . \qquad (13)$$

Фактически мы использовали закон Бойля–Мариотта. Подставляя (13) в (11), находим

$$V(h) = V_0 - v_0 \frac{\rho g h}{p_0 + \rho g h} \ . \qquad (14)$$

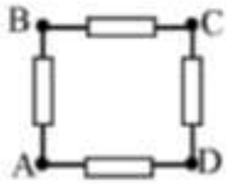
Наконец, равенство $V(h_{\max}) = m/\rho$ дает искомую глубину

$$h_{\max} = \frac{p_0}{\rho g} \frac{\rho V_0 - m}{m - \rho(V_0 - v_0)} \ , \qquad (15)$$

после подстановки численных данных $h_{\max} \approx 10$ м.

Критерии оценивания:
Условие всплытия — 2
Применение уравнения состояния идеального газа — 2
Изотермичность процесса (закон Бойля–Мариотта) — 3
Получение выражения для $h_{\max}$ — 2
Правильный численный ответ — 1

4. При подготовке к экспериментальному туру олимпиады по физике Вася получил электрическую схему из четырех сопротивлений с целью нахождения номиналов входящих в схему элементов, смотри рисунок. Из них три сопротивления имели одинаковый номинал г, а номинал четвертого сопротивления R. Омметром Вася последовательно измерил сопротивление между точками AB, BC и CD Получившиеся значения оказались равны R_{AB} = 0.8 кОм, R_{BC} = 0.8 кОм, а R_{CD} =1.2 кОм. Соответственно. Найдите значения г и R.



Решение.

Допустим, что резистор с сопротивлением R включён между точками A и B. Тогда согласно правилу сложения последовательных и параллельных сопротивлений

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3r}\right)^{-1}, \quad R_{BC} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1}, \quad R_{CD} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1}.$$

То есть $R_{BC} = R_{CD}$, что противоречит условию. Таким образом, резистор сопротивлением R не включён между точками A и B. Аналогичными рассуждениями можно показать, что этот резистор не включён между точками B и C, а также между точками A и D. Поэтому, резистор с сопротивлением R включён между точками C и D. **(4 б.)**

Следовательно,

$$R_{AB} = R_{BC} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1} = \frac{r(2r+R)}{3r+R}, \qquad (1)$$ **(2 б.)**

$$R_{CD} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3r}\right)^{-1} = \frac{R \cdot 3r}{3r+R}. \qquad (2)$$ **(2 б.)**

Разделив (1) на (2), найдём

$$\frac{R_{AB}}{R_{CD}} = \frac{2\frac{r}{R}+1}{3} = \frac{0{,}8\,\text{кОм}}{1{,}2\,\text{кОм}} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда найдём

$$R = 2r. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), найдём

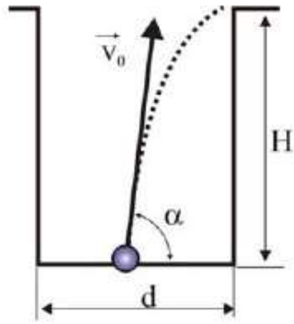
$$r = \frac{5}{6}R_{CD} = \frac{5}{6}1{,}2\,\text{кОм} = 1\,\text{кОм},$$

а

$$R = 2R = 2 \cdot 1\,\text{кОм} = 2\,\text{кОм}.$$

Ответ: r = 1 кОм, R = 2 кОм. **(2 б.)**

5. Испытания образца гранаты производится в центре дна цилиндрической ямы глубиной H. Каким должен быть минимальный диаметр ямы, чтобы осколки, имеющие максимальную скорость v_0, не вылетели из нее?



Решение:

1. Запишем уравнения движения «критического» осколка

$$v_0 \cos\alpha t = \frac{d}{2}, \qquad (1)$$

$$v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = H. \qquad (2)$$

2. Выразим из (1) время и подставим это значение в (2), т.е. получим уравнение траектории

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{4v_0^2}{gd}\mathrm{tg}\alpha + \left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2} + 1\right) = 0, \qquad (3)$$

которое можно рассматривать, как квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$. Условие задачи будет выполняться, если уравнение не будет иметь решений, в этом случае осколки останутся в яме.

3. Чтобы уравнение (3) не имело решений, его дискриминант должен быть меньше нуля

$$\left(\frac{4v_0^2}{gd}\right)^2 - 4\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2} + 1\right) \le 0,$$

или

$$d \ge \sqrt{\frac{4v_0^2}{g^2}\left(v_0^2 - 2gH\right)} \ge \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gH}. \qquad (4)$$

4. Минимальный диаметр ямы, таким образом, должен быть равен

$$d_{min} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gH}. \qquad (5)$$

Критерии оценивания:

Уравнения движения критического осколка 3б

Уравнение траектории 3б

Условие на возможность решения 3б

Минимальный диаметр ямы 1б